محاضرات الدكتور

القسم: الرياضيات السنة: الثالثة المادة: نظرية القياس والتكامل الفصل الأول

مبرهنة: ليكن $\mu^*(E)=0$ عندئذ $E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$

الاثبات:

بما أن $A \cap E \subseteq E$

$$\Rightarrow \mu^*(A \cap E) \leq \mu^*(E) = 0$$

$$A \cap E^c \subseteq A \Rightarrow \mu^*(A \cap E^c) \leq \mu^*(A)$$

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \leq \mu^*(A), \ \forall A \in P(X) \quad (1)$$

ومن جهة أخرى نعلم أن:

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \quad (2)$$

من (1), (2) نحصل على:

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) = \mu^*(A), \ \forall A \in P(X)$$

$$\Rightarrow E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$$

مبرهنة: E, G مجموعتان قابلتان للقياس بالنسبة لـ μ^* فإن:

$E \cup G, \ E \cap G, \ E - G$

قابلة للقياس بالنسبة لـ μ^*

الاثبات: اذا رمزنا $M = E \cup G$

ومنه:

$$\mu^*(A \cap M) = \mu^*[(A \cap M) \cap E] + \mu^*[(A \cap M) \cap E^c]$$

$$= \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c \cap G) \quad (3)$$

وبما أن:

$$\mu^*(A \cap M^c) = \mu^*(A \cap E^c \cap G^c) \quad (4)$$

وبجمع الطرفين:

$$\mu^*(A \cap M) + \mu^*(A \cap M^c) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

$$= \mu^*(A), \ \forall A \in P(X)$$

$$\Rightarrow M = E \cup G \in \mathcal{M}_{\mu^*}$$

مركز تصوير كلية العلوم للخدمات الجامعية (محاضرات، تصوير، خدمات طباعية، قرطاسية، محمولات)

Scanned by CamScanner

سلم أنه

$(E \cap G)^c = E^c \cup G^c \Rightarrow (E \cap G)^c \in \mathfrak{M} \Rightarrow E \cap G \in \mathfrak{M}_{\mu^*}$

$E - G = E \cap G^c \in \mathfrak{M}_{\mu^*} \Rightarrow E - G \in \mathfrak{M}_{\mu^*}$

- العائلة ارتاطى تعريف بينت هي مجموعة قابلة للقياس μ^*
- ثم اذا كانت [redacted] المجموعات E_1, E_2, E_n قابلة للقياس μ^* ان $(\bigcup_{k=1}^{n} E_k)$ و $(\bigcap_{k=1}^{n} E_k)$ قابلة للقياس μ^* ..

مبرهنة (٢): اذا كانت $\mu^*(G)$ قابلة [illegible]

$\mu^*(E \cup G) = \mu^*(E - G) + \mu^*(E)$

الاثبات: لدينا

$E \subset E \cup G \Rightarrow \mu^*(E) \leq \mu^*(E \cup G) \leq \mu^*(E) + \mu^*(G)$

$\mu^*(E \cup G) = \mu^*(E) \ldots (1)$

من ناحية ثانية:

$E - G \subseteq E$

$E \subset (E - G) \cup G$

$\mu^*(E) \leq \mu^*(E - G) + \mu^*(G)$

$\mu^*(E) \leq \mu^*(E - G) \leq \mu^*(E)$

$\mu^*(E - G) = \mu^*(E) \ldots (2) \Rightarrow$

من العلاقتين (1) و (2) نحصل على المطلوب.

مبرهنة: اذا كانت $E_1, E_2, \ldots, E_n$ مجموعات منفصلة قابلة للقياس μ^* منفصلة مثنى مثنى.

$\mu^*[A \cap (\bigcup_{k=1}^{n} E_k)] = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k) \quad \forall A \in P(X)$

مبرهنة: اذا كانت $(E_k)_{k \geq 1}$ متتالية من المجموعات القابلة للقياس μ^* منفصلة مثنى مثنى فإن ..

مركز تصوير كلية العلوم للخدمات الجامعية (محاضرات، تصوير، خدمات طباعية، قرطاسية، مجريات)

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$$ والمجموعات قابلة للقياس بالنسبة لـ μ^*

إما إذا كانت المجموعات E_n غير قابلة للقياس بالنسبة لـ μ^* فإن:

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$$

[illegible] قابلة للقياس بالنسبة لـ μ^*

إذا كانت $(E_n)_{n\ge1}$ قابلة للقياس بالنسبة لـ μ^* فإن:

$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$ ، $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right)$ قابلة للقياس بالنسبة لـ μ^*

تعريف: لتكن $\mathcal{F}_1 \subseteq P(X)$ ، $\mathcal{F}_2 \subseteq P(X)$ وكل منهما [illegible] $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$

$$\gamma_1 : \mathcal{F}_1 \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty] \quad A \longrightarrow \gamma_1(A)$$

$$\gamma_2 : \mathcal{F}_2 \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty] \quad A \longrightarrow \gamma_2(A)$$

عندئذ إذا كان: $\gamma_1(A) = \gamma_2(A) \quad \forall A \in \mathcal{F}_1$

فإننا نسمي الدالة γ_2 تمديد للدالة γ_1 [illegible] $\mathcal{F}_2$ [illegible] $\mathcal{F}_1$

أو نسمي γ_1 مقصور الدالة γ_2 على $\mathcal{F}_1$

ونرمز لذلك بـ: $\gamma_1 = \gamma_2|_{\mathcal{F}_1}$ (γ_1 مقصور γ_2)

ملاحظة: أن الصفوف الواردة في التعريف السابق $\mathcal{F}_1$ ، $\mathcal{F}_2$ [illegible] جبر أو [illegible] كما أن γ_1 ، γ_2 قياسات أو [illegible] قياس

أو قياس خارجي.

نتيجة: ليكن μ قياس خارجي على $P(X)$ عندئذ:

$\mathcal{M}$ هي [illegible] X

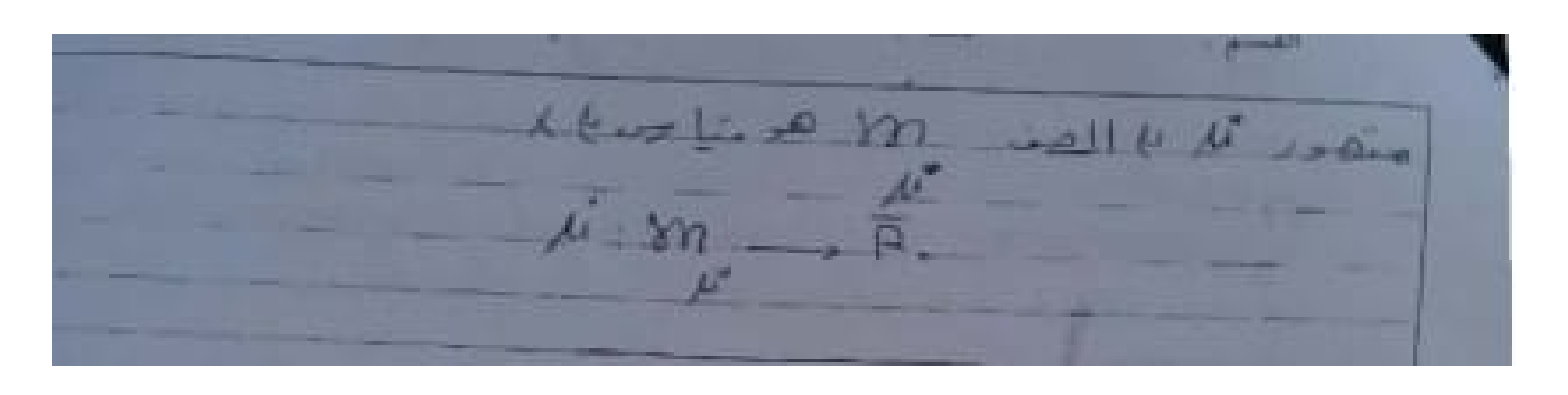
μ^*

μ^* هو قياس على X

$\mathcal{M}$

μ^*

مركز [illegible] كلية العلوم للخدمات الجامعية (محاضرات . تصوير . خدمات طباعية . قرطاسية . محمصات)



Scanned by CamScanner